INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
A L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1931. — Option MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

NOTA :

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E. Étant donnés deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on note

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$ le produit scalaire canonique de E.

Soit $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E; on rappelle que, pour tout élément $A \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique élément $A^* \in \mathcal{L}(E)$, tel que

$$< Ax, y > = < x, A^* y > \qquad \text{pour tous } x, y \text{ dans E}$$

Tournez la page S. V. P.

Un endomorphisme A est dit auto-adjoint, si $A = A^*$.

Un tel endomorphisme auto-adjoint est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et admet une base orthonormée de vecteurs propres; sa matrice représentative dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est symétrique.

Rappelons finalement qu'un endomorphisme A est dit orthogonal, si :

$$< Ax, Ax > = < x, x > \qquad \text{pour tout } x \text{ de E}$$

Remarque : Les questions qui suivent peuvent être résolues matriciellement, c'est-à-dire après s'être donné une base de E, ou l'être directement avec les applications linéaires.

PARTIE I

Étant donnés deux endomorphismes auto-adjoints V et W, on dit que V est supérieur à W et on note $V \geqslant W$ si et seulement si $V - W$ est semi-défini positif :

$$< x, Vx - Wx > \geqslant 0 \qquad \forall x \in E$$

1° La relation $\geqslant$ ainsi définie sur l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints est-elle une relation d'ordre? Est-elle totale?

2° Vérifier que si $V \geqslant W$ et si $B \in \mathcal{L}(E)$, alors : $BVB^* \geqslant BWB^*$.

3° Montrer que $V \geqslant 0$ si et seulement si V a toutes ses valeurs propres positives ou nulles.

4° Étant donné un endomorphisme auto-adjoint $V \geqslant 0$, établir l'existence d'un endomorphisme auto-adjoint $C \geqslant 0$ tel que $V = C^2$. Un tel endomorphisme C est appelé « racine carrée positive » de V.

5° Montrer que les sous-espaces propres d'une telle racine carrée positive C sont les mêmes que les sous-espaces propres de V. En déduire l'unicité de la racine carrée positive. Celle-ci est dans la suite notée : $C = V^{\frac{1}{2}}$.

6° Vérifier que $V^{\frac{1}{2}}$ est inversible si et seulement si V l'est et établir que :

$$(V^{\frac{1}{2}})^{-1} = (V^{-1})^{\frac{1}{2}}.$$

Partie II

Étant donné un endomorphisme auto-adjoint V, nous appelons spectre ordonné de V, et notons SpV, l'ensemble de ses valeurs propres (avec leurs ordres de multiplicité) ordonnées par ordre décroissant. Si V et W sont deux endomorphismes auto-adjoints, dont les spectres ordonnés sont :

$$\mathrm{Sp}V = \{ \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \}$$

$$\text{et} \quad \mathrm{Sp}W = \{ \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n \}$$

nous dirons que $\mathrm{Sp}V \geqslant \mathrm{Sp}W$ si et seulement si $\lambda_i \geqslant \mu_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$

1° Soient $u_1 \ldots u_p$ des vecteurs propres orthogonaux de V associés à des valeurs propres $\lambda_{i_1} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{i_p}$ et L l'espace engendré par ces p vecteurs. Déterminer les valeurs minimale et maximale du rapport $\dfrac{<x, Vx>}{<x, x>}$, lorsque x parcourt L en restant différent de 0.

2° Soient V et W deux endomorphismes auto-adjoints satisfaisant $V \geqslant W$. On appelle L le sous-espace engendré par $n - p + 1$ vecteurs propres orthogonaux associés aux $n - p + 1$ plus petites valeurs propres de V et L' le sous-espace engendré par p vecteurs propres orthogonaux associés aux p plus grandes valeurs propres de W.

Calculer la valeur maximale de $\dfrac{<x, Vx>}{<x, x>}$, lorsque $x (x \neq 0)$ parcourt L, et la valeur minimale de $\dfrac{<x, Wx>}{<x, x>}$, lorsque $x (x \neq 0)$ parcourt L'.

En déduire que $\mathrm{Sp}V \geqslant \mathrm{Sp}W$.

3° Construire un contre-exemple montrant que l'implication réciproque ($\mathrm{Sp}V \geqslant \mathrm{Sp}W \Rightarrow V \geqslant W$) est fausse dès que $n \geqslant 2$.

4° Montrer que $\mathrm{Sp}V \geqslant \mathrm{Sp}W$ si et seulement si il existe un endomorphisme orthogonal A tel que

$$V \geqslant AWA^*$$

5° Soit A un endomorphisme orthogonal, tel que

$$V \geqslant AVA^*$$

a. Vérifier que V et AVA^* ont mêmes valeurs propres.

b. Montrer que tout sous-espace propre de V est invariant par A.

c. En déduire que $V = AVA^*$.

128

Partie III

Si F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E, tout vecteur x de E admet une décomposition unique : $x = y + z \quad y \in F, z \in G$. L'application linéaire qui à $x \in E$ fait correspondre le vecteur $y \in E$ intervenant dans cette décomposition est appelée projecteur sur F parallèlement à G.

Si V est un endomorphisme auto-adjoint défini positif (c'est-à-dire tel que $V \geqslant 0$ et que V soit inversible), on peut définir un produit scalaire $<.,.>_V$ par : $<x, y>_V = <x, Vy> \quad \forall \quad x, y \in E$.

On appelle projecteur V-orthogonal sur F le projecteur sur F parallèlement au sous-espace $F^\perp = \{ x \in E : <x, y>_V = 0 \quad \forall y \in F \}$.

1° Vérifier que le projecteur V-orthogonal sur F, noté P, est une application linéaire, idempotente ($P^2 = P$) et satisfait : $P^*V = VP = P^*VP$.

2° Inversement, montrer que tout endomorphisme idempotent vérifiant $P^*V = VP$ peut être considéré comme un projecteur V-orthogonal. Sur quel sous-espace?

3° En déduire que, si P est le projecteur V-orthogonal sur F, P^* est le projecteur V^{-1}-orthogonal sur V(F) (image de F par l'endomorphisme V).

4° Établir l'égalité

$$V^{-1} = PV^{-1}P^* + (I - P)\, V^{-1} (I - P)^*$$

où I désigne l'application identité.

En déduire que : $V^{-1} \geqslant PV^{-1}P^*$.

5° Soit B un projecteur sur F parallèlement à un sous-espace G, montrer que

$$BV^{-1}B^* \geqslant PV^{-1}P^*$$

6° Inversement, montrer que si A est un projecteur sur F vérifiant pour tout autre projecteur B sur F :

$BV^{-1}B^* \geqslant AV^{-1}A^*$, alors A est le projecteur V-orthogonal sur F.

7° En déduire que si A est un projecteur sur F, $AV^{-1}A^*$ n'est comparable à V^{-1} pour la relation $\geqslant$ que si A est le projecteur V-orthogonal sur F.

Tournez la page S. V. P.

Partie IV

V est un endomorphisme auto-adjoint défini positif, Q est le projecteur I-orthogonal sur le sous-espace F (on a $Q = Q^*$ d'après III. 1°), Q_1 est le projecteur V^{-1}-orthogonal sur F, Q_2 est le projecteur V^{-1}-orthogonal sur V(F).

1° Établir les inégalités suivantes :

a. $Q_1 V Q_1^* \leqslant QVQ^*$

b. $Q \leqslant Q_2^* Q_2$

c. $Q_2 V Q_2^* \leqslant V$

d. $Q_2^* V^{-1} Q_2 \leqslant V^{-1}$

2° Soient A et B deux endomorphismes de E tels que AB et BA soient diagonalisables et soit λ_1 une valeur propre non nulle de AB associée au sous-espace propre E_1.

Vérifier que λ_1 est aussi valeur propre de BA. Quel est le sous-espace propre associé? En déduire que Sp(AB) = Sp(BA).

3° Utiliser IV. 1° et IV. 2° pour montrer que

$$\mathrm{Sp}\,(Q_1 V Q_1^*) \leqslant \mathrm{Sp}\,(QVQ^*) \leqslant \mathrm{Sp}(Q_2 V Q_2^*) \leqslant \mathrm{Sp}V$$

4° Établir que : $\langle x, Vy\rangle = \langle x, VQ_2^*\, V^{-1}\, QVy\rangle \quad \forall x, y \in F$.

En déduire que les restrictions à F de QV et $Q_2^* V^{-1}$ sont inverses l'une de l'autre.

5° Soient $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de QVQ^*, $\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n$ les valeurs propres de V, montrer que :

$$\lambda_1 \leqslant \mu_1, \ldots, \lambda_r \leqslant \mu_r$$

$$\mu_n \leqslant \lambda_r, \ldots, \mu_{n-r+1} \leqslant \lambda_1$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail